21/3/17

Μαθημα 6ο

$Y \leq O$ υποομαδα

$O = \langle a \rangle \Rightarrow Y \leq O$ κυκλική

$\mathbb{Z}_4$ $\quad \langle [3] \rangle = \{3, 3+3=2, 2+3=1, 1+3=0\}$

O, $\alpha \in O \Rightarrow \langle \alpha \rangle = \{ \alpha^k \mid k \in \mathbb{Z} \} \leq O$

$\{ k\alpha \mid k \in \mathbb{Z} \}$ μια αβελιανή $\leq O$

$Y \leq O \iff Y \neq \emptyset$, $\forall \alpha, \beta \in Y \Rightarrow \alpha\beta^{-1} \in Y$

Προταση: Αν O ομαδα και Y πεπερασμενο υποσυνολο το οποιο να ειναι κλειστό ως προς την πράξη της O, τοτε $Y \leq O$.

αποδειξη:

$Y = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq O$ και $(Y, \cdot)$ ειναι καλά ορισμένο.

Εστω $\alpha_1 \in Y \Rightarrow \alpha_1 Y = \{\alpha_1\alpha_1, \alpha_1 a_2, \dots, \alpha_1\alpha_k\} \subseteq Y$ και μαλιστα $\alpha_1 Y = Y$

$\alpha_1\alpha_i = \alpha_1\alpha_j \xrightarrow{\text{ομαδα}} \alpha_1^{-1}\alpha_1\alpha_i = \alpha_1^{-1}\alpha_1\alpha_j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$ αρα $\alpha_1 Y = Y$

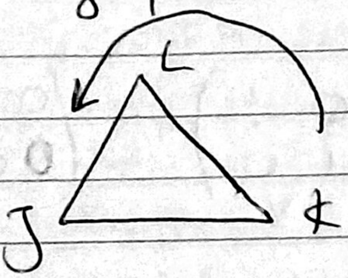
$\alpha_1 Y = Y \Rightarrow \exists \alpha_i$ ωστε $\alpha_1\alpha_i = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_i = 1_O \Rightarrow 1_O \in Y$

$\exists \alpha_j \in Y$ με $\alpha_i\alpha_j = 1_O \Rightarrow \alpha_j = \alpha_i^{-1}$

Αρα υπαρχουν και οι αντιστροφοι.

π.χ. $GL(2, \mathbb{C})$, $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \overset{J}{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}, \overset{-J}{\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}, \overset{K}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{-K}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{L}{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}}, \overset{-L}{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}} \right\}$

Αν δείξουμε ότι $\forall A,B \in Y \Rightarrow AB \in Y \Rightarrow Y \leq GL(2,\mathbb{C})$



$JK = L,\ KL = J,\ LJ = K,\ KJ = -L \ldots$

<u>π.χ.</u> $k\cdot\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ είναι υποομάδα?

Αρκεί να δείξουμε ότι $l-m \in 2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$,
αν $l, m \in 2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$
τότε $l = 6\kappa$ και $m = 6\kappa'$
$l-m = 6\kappa - 6\kappa' = 6(\kappa-\kappa') \in 2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$

• Αν πάρω $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ είναι υποομάδα του $\mathbb{Z}$?
παίρνω ένα στοιχείο το $2 \in 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$
-//- το $3 \in 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$
αν ήταν υποομάδα θα έπρεπε να ανήκει και το άθροισμα τους, $2+3 = 5 \notin 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$
άρα δεν είναι.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $Y_1, Y_2 \leq O$ τότε: α) $Y_1 \cap Y_2 \leq O$,
β) $Y_1 \cup Y_2 \leq O$, αν $Y_1 \leq Y_2$ ή $Y_2 \leq Y_1$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω O πεπερασμένη κυκλική
$O = \langle \alpha \rangle$, $|O| = n$
α) για $m \in \mathbb{N}$, η O έχει υποομάδα τάξης m <u>ανν</u> m/n
β) αν $n = km$, τότε η O έχει <u>μοναδική</u> υποομάδα τάξης m.
γ) $\langle \alpha^r \rangle = \langle \alpha^s \rangle$ ανν $(r,n) = (s,n)$

Η κυκλική έχει τάξη ότι τάξη έχει ο γεννήτορας της

αποδειξη:

α) Έστω m/n τότε $\langle \alpha^{\frac{n}{m}} \rangle$ έχει τάξη

$$o(\alpha^{\frac{n}{m}}) = \frac{o(\alpha)}{\left(\frac{n}{m}, o(\alpha)\right)} = \frac{n}{\left(\frac{n}{m}, n\right)} = m$$

αντιστροφα:

Έστω $Y \leq G$ με $|Y| = m$, Y κυκλική $= \langle \alpha^s \rangle$

$$|Y| = o(\alpha^s) = \frac{n}{(s,n)} \Rightarrow m = \left(\frac{n}{s,n}\right) \Rightarrow m/n$$

β) $|\mathbb{Z}_4| = 4$

παίρνω την υποομάδα που γεννάται απο το 1 και το $3 \cdot 1$ δηλ. $\langle 1 \rangle = \langle 3 \cdot 1 \rangle = \mathbb{Z}_4$

οι γεννήτορες διαφέρουν οι υποομάδες είναι ίσες

$(1,4) = (3,4)$ έχουν ίδιο Μ.Κ.Δ.

εδώ έχουμε.

Έστω $Y_1, Y_2 \leq G$ με $|Y_1| = |Y_2| = m \Rightarrow$ θέλουμε $Y_1 = Y_2$

αυτές είναι κυκλικές Y_1, Y_2: $Y_1 = \langle \alpha^r \rangle$ και $\langle \alpha^s \rangle$

και επιλέγουμε τα στοιχεία αυτά να έχουν το μικρότερο εκθέτη.

Γνωρίζουμε ότι $|Y_1| = \frac{n}{(r,n)} = \frac{n}{(s,n)} = |Y_2| \Rightarrow$

$\Rightarrow (r,n) = (s,n)$

Αν:

$Y_1 \neq Y_2 \Rightarrow \alpha^r \notin Y_2$ δηλ. $\alpha^r \neq (\alpha^s)^k$

Έστω $s < r \Rightarrow r = \pi s + v$ και $0 < v < s \Rightarrow \alpha^r \cdot \alpha^{-\pi s} = \alpha^v \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^{r-\pi s} = \alpha^v$

Έχουμε $(r,n) = (s,n)$ και $\alpha^{r-\pi s} = \alpha^v$ $0 < v < s$

και $\frac{n}{(r-\pi s, n)} = \frac{n}{(v,n)} \Rightarrow (r-\pi s, n) = (v, n)$

Εστω $\delta = (r,u) = (s,n) \Rightarrow \delta \mid r - \pi s \Rightarrow \delta / u$ και
$0 < u < s$ ατοπο.
Αρα $u = 0 \Rightarrow r = \pi s \Rightarrow Y_1 = Y_2$

γ) $\langle \alpha^r \rangle = \langle \alpha^s \rangle \Rightarrow \dfrac{n}{(r,n)} = \dfrac{n}{(s,n)} \Rightarrow (r,n) = (s,n)$

■

π.χ. Να βρουμε ολες τις διακεκριμενες υποομαδες της $\mathbb{Z}_{12}$.

Λυση

Βρες ολους τους διαιρετες του 12:
1, 2, 3, 4, 6, 12
Τοσες ειναι και οι υποομαδες της $\mathbb{Z}_{12}$ με τις ιδιες ταξεις:
1 2 3 4 6 12

$\mathbb{Z}_{12} = \langle 1 \rangle$

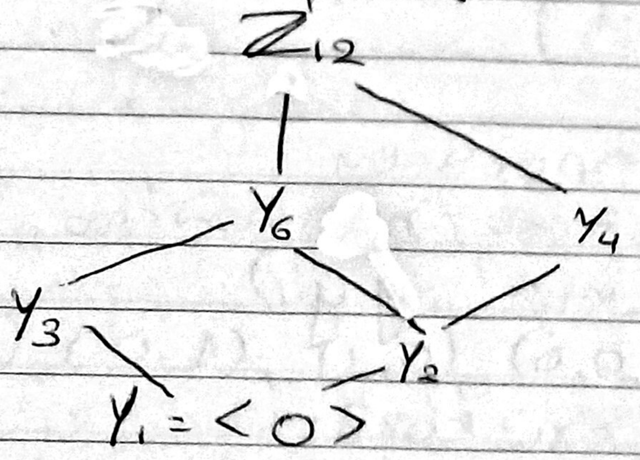
$Y_1 = \langle \frac{12}{1} \cdot 1 \rangle = \langle 0 \rangle$
$Y_2 = \langle \frac{12}{2} \cdot 1 \rangle = \langle 6 \rangle = \{6, 0\}$
$Y_3 = \langle \frac{12}{3} \cdot 1 \rangle = \langle 4 \rangle = \{4, 8, 0\}$
$Y_4 = \langle \frac{12}{4} \cdot 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \{3, 6, 9, 0\}$
$Y_6 = \langle \frac{12}{6} \cdot 1 \rangle = \langle 2 \rangle = \{2, 4, 6, 8, 10, 0\}$

$Y_{12} = \langle \frac{12}{12} \cdot 1 \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_{12}$

Αυτες ειναι υποομαδες της $\mathbb{Z}_{12}$.

Η Y_2 υποομαδα της Y_4 , $Y_2 \leq Y_4$
Y_3 -//- Y_6 $Y_3 \leq Y_6$
Y_2 -//- Y_6 $Y_2 \leq Y_6$

πλέγμα των υποομάδων :



Πρόταση: Έστω $O = \langle a \rangle$ άπειρη κυκλική.
Τότε για κάθε φυσικό n έχουμε και μια διαφορετική υποομάδα $Y_n = \langle \alpha^n \rangle$.)

απόδειξη:

π.χ. $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ $\quad k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$k \neq m \Rightarrow k\mathbb{Z} \neq m\mathbb{Z}$ $\quad$ δεν είναι ίσα σαν σύνολα

Αν $n \neq m$ και $Y_n = Y_m$ τότε $\alpha^n \in Y_m \Rightarrow \alpha^n = (\alpha^m)^k$ και $\alpha^m = (\alpha^n)^l$ αλλά τότε $n = m$ αδύνατο.

Άσκηση: Να βρείτε τις υποομάδες του $\mathbb{Z}_{36}$ και να φτιάξετε το πλέγμα.

Ευθέα Γινόμενα

π.χ. $\mathbb{R}$ δ.χ. , $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Ορισμός: Έστω O και O' δύο ομάδες. Το καρτεσιανό γινόμενο $O \times O'$ αποτελεί ομάδα με πράξη κατά συντεταγμένες:

$(O, \circ)$ και $(O', *)$

$(a, a'), (b, b') \in O \times O'$

$(a, a') \cdot (b, b') = (a \circ b, a' * b')$

Πρέπει να δείξουμε ότι είναι προσεταιριστική, έχει μοναδιαίο $(1_O, 1_{O'})$ και κάθε (α, α') έχει αντίστροφο $(\alpha^{-1}, (\alpha')^{-1})$

π.χ. 1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με την πρόσθεση

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ με πρόσθεση και πολ/μο

$(x, y) \cdot (x', y') = (x + x', y \cdot y')$

3) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

όχι κυκλική

αφού $(1,1) + (1,1) = (0,0)$

4) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$

$= \langle (1,1) \rangle$

κυκλική

$(1,1) + (1,1) = (0,2)$

$(0,2) + (1,1) = (1,0)$

$(1,0) + (1,1) = (0,1)$

$(0,1) + (1,1) = (1,2)$

$(1,2) + (1,1) = (0,0)$

π.χ. $\mathbb{Z}_2 \times \Sigma_3$ όχι κυκλική και έχει 12 στοιχεία

Πρόταση. Έστω O και O' ομάδες. Το γινόμενο $O \times O'$ είναι αβελιανή ομάδα <u>ανν</u> O και O' αβελιανές.

απόδειξη:

Αν O και O' αβελιανές, τότε $(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$

$= (\alpha' + \alpha, \beta' + \beta) = (\alpha', \beta') + (\alpha, \beta)$

Αν $O \times O'$ αβελιανή $\Rightarrow$ O και O' αβελιανές

$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha', \beta') + (\alpha, \beta) \Leftrightarrow$

$(\alpha + \alpha', \beta + \beta') = (\alpha' + \alpha, \beta' + \beta) \Leftrightarrow$

$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$

$\beta + \beta' = \beta' + \beta$

Σημείωση: Αν $O_1, \ldots, O_k$ είναι ομάδες με τον ίδιο τρόπο ορίζεται η ομάδα $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_k$ με πράξη κατά συντεταγμένες

π.χ. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
Να βρείτε όλες τις υποομάδες της.

Λύση
$<(0,0)>$, $\mathbb{Z}_2 \times \{0\} \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\{0\} \times \mathbb{Z}_2 \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$<(1,1)> = \{(1,1), (0,0)\} \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Πρόταση: Αν $Y_1 \leq O_1$ και $Y_2 \leq O_2$ τότε
$Y_1 \times Y_2 \leq O_1 \times O_2$
απόδειξη:
(α, β) και $(\gamma, \delta) \in Y_1 \times Y_2 \xRightarrow{\text{Πρέπει}} (\alpha,\beta)(\gamma,\delta)^{-1} \in Y_1 \times Y_2$

$\left.\begin{array}{l} \alpha, \gamma \in Y_1 \\ \beta, \delta \in Y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha\gamma^{-1} \in Y_1 \\ \beta\delta^{-1} \in Y_2 \end{array} \Rightarrow (\alpha\gamma^{-1}, \beta\delta^{-1}) \in Y_1 \times Y_2$

Όμως $(\alpha\gamma^{-1}, \beta\delta^{-1}) = (\alpha,\beta)(\gamma^{-1}, \delta^{-1}) = (\alpha,\beta)(\gamma,\delta)^{-1} \in Y_1 \times Y_2$
$\Rightarrow Y_1 \times Y_2 \leq O_1 \times O_2$
άρα είναι υποομάδα

Προσοχή! Δεν είναι όλες οι υποομάδες της $O_1 \times O_2$ καρτεσιανά γινόμενα υποομάδων: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Θεώρημα: Έστω $O = O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_k$ καρτεσιανό γινόμενο ομάδων
1) Αν $\alpha_i \in O_i$ και $o(\alpha_i) < \infty$ για όλα τα i, τότε
$o(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \text{ΕΚΠ}(o(\alpha_1), o(\alpha_2), \ldots, o(\alpha_k))$
2) Αν O_i είναι κυκλική πεπερασμένη τάξης για όλα τα i, τότε η O είναι κυκλική ανν
$(|O_i|, |O_j|) = 1$ για όλα τα $i \neq j$
ΜΚΔ